

数学コラム(21)
ペニーのゲーム
西山豊

トランプを使った面白い確率の遊びを紹介しましょう。トランプはスペード、クラブ、ダイヤ、ハートの4種類があり、数字はエース(A)からキング(K)までの13個で合計52枚ありますね。スペードとクラブは黒色、ダイヤとハートは赤色ですから、26枚の黒色カードと26枚の赤色カードということになります。ここではトランプの黒と赤を使った二人のゲームについて説明しましょう。

トランプをよくシャッフルして裏向けにして机の上に置きます。そこで、1枚ずつカードを開いていきますが、出てきそうな3つの色のパターンを予想してもらいます。たとえば、「黒黒赤」とか「赤黒赤」とかです。それで、このようなパターンが先に出た方が勝ちということにします。よろしいですね。何でもいから自由に決めてください。たとえば、あなたは「赤赤黒」にしたとしましょう。そこで私は「黒赤赤」にします。「赤赤黒」対「黒赤赤」ですが、黒と赤の表記は大変なので黒をBlackのB、赤をRedのRとします。すると対戦はRRB対BRRですね。

パソコンの乱数を使えばBとRのランダムな列を作り出すことができます。たとえば、ランダムなBとRの52個の列は次のようになります。

BBRBBRRRBBBRRBRRBBBRRBRRBRRRRRBBBRRBRRBR
RRRRBRBB

カードを1枚ずつ表向けます。そして7枚目まで開いたとき1回目の勝負が決まります。BBRBBRRの7枚ではBRRがRRBより先に出たのでBRRの勝ちとなります。そこでこの7枚を除いてゲームを再開します。つぎつぎと勝負していくこととすれば、つぎのように仕切り目(|)のところで勝負が決まります。最後の3枚は勝負なしです。

BBRBBRR | RBBBRRBRRBBRBR | BBRBRBR | RRRB | BBRR | B
BRR | BRR | RRRB | RBB

8回の勝負があり、その内訳は6対2でBRRが勝

ちます。「赤赤黒」と「黒赤赤」の表れる確率は等しいので、勝ち負けの確率は同じように思われますが、「黒赤赤」の方が3倍も強いのです。こんなことを信じられますか。

「赤赤黒」で負けたあなたは、今度は「黒赤赤」にすると言うでしょう。そこで私は「黒黒赤」に変更します。「黒赤赤」対「黒黒赤」の対戦(BRR対BBR)です。パソコンによるBとRの別の乱数列は次の通りとします。

RRBRBRBRRRRBRBBRBRBBBRRRBRBBBRRBBBRRBB
RRBRRBR

つぎの仕切り目(|)のところで勝負が決まり、11回の勝負があり、7対4でBBR(「黒黒赤」)が勝ちます。またしても私が勝ってしまいました。

RRBRBR | BRR | RBR | BBR | BRBBR | RRBR | BBRR | BBRR |
BBBR | BRBBR | RBR | RBR

以上の話しは、このコラムを書くために私がデータを操作しているわけではありません。どちらも後者が勝つことが数学的に証明されていて、最初の対戦(RRB対BRR)では3対1で、次の対戦(BRR対BBR)では2対1でともに後者が勝つこともわかっています。これは1969年にウォルター・ペニーが、コインの裏表を用いて考案した確率の面白いゲームであり、コインの裏表をトランプの赤と黒に置き換えたものです。

何度か対戦をすると、このゲームは後手必勝(後出しじゃんけん)であることがわかるでしょう。ではどのような手を出せば勝利するのか、その場合の勝率はどうなるのか等等興味をわくことですが、詳しくは参考文献をご覧ください。トランプの黒と赤は厳密には等確率ではありませんが、操作性においてコインより優れていますので、興味を持たれた読者は試して下さい。

(参) 西山豊「数学を楽しむ／確率のパラドックス」
『理系への数学』2010年3月号、4-8ページ

(にしやまゆたか／大阪経済大学)